INTRODUZIONE AL TEOREMA SPETTRALE

<u>Teorema 9.1</u>

Dato $T: V \to V$ endomorfismo, con V sp. vett su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) munito di prodotto scalare, V di dim finita.
Esiste $T^*: V \to V$ endomorfismo, univocamente determinato dalla proprietà

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle$$

$$\forall u, v \in V.$$

Se si fissa una base ortonormale di V $u_1, \ldots, u_n$, vale

$$[T^*]^{v_1 \; v_n}_{v_1 \; v_n} = \overline{{}^t[T]^{v_1 \; v_n}_{v_1 \; v_n}}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & i & 3 \\ 1 & i & 2 \\ 4i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T^*] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4i \\ -i & -i & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$ $\langle \, , \rangle$ è PROD scalare standard

$$[T]^{st}_{st} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

st è ORTONORMALE rispetto a PROD sc standard

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

VERIFICHIAMO

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right\rangle$$

TU

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x+3y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = (2x+3y)z + {} + (x+3y)t = 2xz+3yz+xt+3yt$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2z+t \\ 3z+3t \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \underset{//}{2xz} + \underset{0}{xt} + \underset{\times}{3yz} + \underline{3yt}$$

Def L'endomorfismo T^* si dice AGGIUNTO di T. Se $T = T^*$ si dice che T è AUTOAGGIUNTO.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $v_1, \dots, v_n$ è base ortonormale, $T = T^*$ significa

$$[T^*] = {}^t[T]$$

Allora $${}^t[T] = [T]$$

cioè $[T]$ è in tal caso

SIMMETRICA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -5 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio Sia $S \subseteq Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ dato dalle matrici simmetriche.

È uno spazio vettoriale? (VERIFICARE) Che dimensione ha?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è base di S

$$\begin{pmatrix} \cdot & \times & \times & \times \\ & \cdot & \times & \times \\ & & \cdot & \times \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$

in $Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$

dim S è $\frac{4 \cdot 5}{2}$

In $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

dim S è $\frac{n(n+1)}{2}$

<u>Teorema</u> 9.3 Sia $T: V \to V$ autoaggiunto su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Sia λ un autovalore

di T, allora $\lambda \in \mathbb{R}$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dim Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di T.

e sia $v \in V - \{0\}$ un autovettore

rel. a λ.

$$Tv = \lambda v.$$

$$\langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \underline{\lambda \langle v, v\rangle}$$

$$\|$$

$$\langle v, T^* v\rangle$$

$$\|$$

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \underline{\bar{\lambda} \langle v, v\rangle}$$

perché T è autoaggiunto.

per cui

$$\lambda \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$\langle v, v \rangle \neq 0$ dunque

$$\boxed{\lambda = \bar{\lambda}}$$ cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

<u>Teorema 9.4</u> Sia $T : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto ($\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$)

Allora VALGONO

1) $P_T(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{a_k}$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ REALI.

2) T ha almeno un AUTOVETTORE

3) Siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori relativi ad autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Allora $v_1, \dots, v_r$ sono ORTOGONALI.

Dim 3) Sia

$$T v = \lambda v$$

$$T w = \mu w$$

con $\lambda \neq \mu$; $v, w \in V - \{0\}$

Devo mostrare $\langle v, w \rangle = 0$.

$$\langle Tv, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle v, Tw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v,w\rangle$$

$\uparrow$ perché $T=T^*$

$$\lambda\langle v,w\rangle = \mu\langle v,w\rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \neq 0}}{(\lambda-\mu)}\langle v,w\rangle = 0$$

allora $\langle v, w \rangle = 0$

Lemma 9.5

Sia V sp. vett su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Sia $T : V \to V$ endomorfismo.

Sia W un sottospazio di V

tale che $T(W) \subseteq W$

(cioè se $w \in W$
$Tw \in W$)

Allora vale anche

$$T^*(W^\perp) \subseteq W^\perp$$

Dim. Sia $v \in W^\perp$.

Devo dim che $T^* v \in W^\perp$

Per ogni $w \in W$ vale $Tw \in W$

allora

$$0 = \langle Tw, v \rangle$$

perché $Tw \in W$, $v \in W^\perp$

però $\langle Tw, v \rangle = \langle w, T^* v \rangle$

quindi

$$\langle w, T^* v \rangle = 0$$

questo vale $\forall x \in W$ allora
$T^* v \in W^\perp$.

Teorema spettrale, caso reale

Sia $T : V \to V$ endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ORTONORMALE di V di autovettori per T.

Dim

Per induzione su $\dim V$.

PASSO BASE
Caso $\dim V = 1$ BANALE

PASSO INDUTTIVO
Sia ora $\dim V = n > 1$
supponiamo che il teorema sia vero

per endomorfismi autoaggiunti su spazi di dimensione $< \dim V$.

Per il Teorema 9.4, T ha almeno un autovettore.

Sia $v_1 \in V - \{0\}$ un autovettore di norma 1.

$W = \mathrm{Span}(v_1)$ ha dim 1

$W^\perp$ ha dim $n-1$

Ora per il Lemma 9.5

$W^\perp$ è T^*-invariante

ma $T^* = T$

dunque $W^\perp$ è T invariante.

$$T_{|W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$$

si verifica (vedi NOTA a pag 136) che $T_{|W^\perp}$ è autoaggiunta.

Per IP INDUTTIVA esiste

$v_2, \ldots, v_n$ base ORTONORMALE

di $W^\perp$ fatta di autovettori per T.

Allora

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ è la base

di V cercata. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tc

$$[T]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ORTONORMALE che diagonalizza T.

SVOLGIM.

$$P_T(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-2) \det \begin{pmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ t-2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-2)\left[(t-2)^2 - 1\right] +$$

$$- (t-2) =$$

$$= (t-2)\left[(t-2)^2 - 1 - 1\right] =$$

$$= (t-2)\left[t^2 - 4t + 4 - 2\right] =$$

$$= (t-2)(t^2 - 4t + 2)$$

$$= (t-2)($$

$$\frac{4+\sqrt{8}}{2} \qquad \frac{4-\sqrt{8}}{2}$$

$$(2+\sqrt{2}) \quad (2-\sqrt{2})$$

Ha 3 autovalori:

$$2, \quad 2+\sqrt{2}, \quad 2-\sqrt{2}$$

$$V_2 = \operatorname{Ker}(T-2I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_{2+\sqrt{2}} = \operatorname{Ker}\left(T-(2+\sqrt{2})I\right) =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

z libero

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} z = 0$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} z$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} z$$

$$\phi = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= (2+\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

FINITE VOI

trovate autovettore rel. a $2-\sqrt{2}$.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \ldots\ldots$$

<u>Esercizio</u> Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ autoaggiunto, ossia SIMMETRICA, tale che $\det T > 0$ e $\operatorname{Tr} T < 0$. Di che segno sono gli autovalori

di T ?

SVOLG.

Prendo una base in cui T è diagonale

$$[T]_{v_1 v_2}^{v_1 v_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\det T = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ dunque λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno

$\operatorname{Tr} T = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ dunque

$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.